GeoGebra4

Τετράδιο εργασίας 6ο

Μέτρηση σε ακτίνια , Κλάσματα & Οπτικοποίηση

Επίσημη μετάφραση των οδηγιών για τη χρήση του λογισμικού GeoGebra που αναπτύχθηκαν από το Πανεπιστήμιο του Limerick της Ιρλανδίας, κατόπιν αδείας η οποία παραχωρήθηκε στον κ.Σταμάτη Μακρή των "Εκπαιδευτηρίων Καίσαρη", ύστερα από σχετικό αίτημα.

Permission is granted to make electronic or hard copies of all or part of this work for personal or classroom use without charge on condition that copies are not made or disseminated for profit or commercial benefit.
Copies MUST show this notice and the full citation on the first page.
Any use of the work other than as authorized under this notice is prohibited.
©2012 NCE-MSTL
Dr. Olivia Fitzmaurice,Lecturer Mathematics Education,
Dept. of Mathematics & Statistics,University of Limerick.

Σταμάτης Μακρής – Μαθηματικός
www.kessaris.edu.gr

Πίνακας περιεχομένων

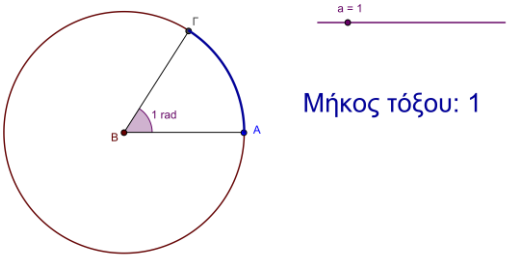
1) Μέτρηση σε ακτίνια σελ:2
2) Οπτικοποίηση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων .. σελ:3
3) Οπτικοποίηση του μέγιστου σελ:5
4) Εμβαδό επιφανείας σελ:9

1- Μέτρηση σε ακτίνια

Προετοιμασία

★ Ανοίξτε ένα νέο αρχείο GeoGebra

★ Αποκρύψτε ή αποκολλήστε το παράθυρο της Άλγεβρας. Αποκρύψτε το σύστημα αξόνων από Προβολή→Άξονες ή από το 1ο εικονίδιο κάτω από τα εργαλεία γεωμετρίας.



★ Από το μενού Επιλογές μπορείτε να επιλέξετε «Ετικετοποίηση αντικειμένων» «Μόνο σε νέα σημεία».

★ Στο μενού "Επιλογές"→ Επιλογές επιλέξτε για μονάδα μέτρησης γωνίας-τόξου τα ακτίνια.

Γνωριμία με νέα εργαλεία

Κυκλικό Τόξο με κέντρο που διέρχεται από δύο σημεία Νέο εργαλείο

Κάντε Click στο κέντρο του κύκλου και μετά στα σημεία του κύκλου που είναι τα άκρα του τόξου με σειρά την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.

Βοηθητικό Στοιχείο: Μην ξεχνάτε να διαβάζετε τη βοήθεια για κάθε εργαλείο που επιλέγετε. Μπορεί να σας φανεί χρήσιμο να δοκιμάσετε τα νέα εργαλεία πριν ξεκινήσετε την κατασκευή σας.

Όταν δημιουργήσουμε το κυκλικό τόξο παρακάτω θα το μετακινήσουμε μια "Στρώση" πιο μπροστά και έτσι δε θα φαίνεται ο κύκλος από κάτω.

Οδηγίες κατασκευής Βήμα-Βήμα

1.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *x^2+y^2=1* για να δημιουργήσετε τον μοναδιαίο κύκλο c. Ανοίξτε το παράθυρο ιδιοτήτων και επιλέξτε "Σταθερό αντικείμενο".
2.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *(1,0)* για να δημιουργήσετε το σημείο A. Ανοίξτε το παράθυρο ιδιοτήτων και επιλέξτε "Σταθερό αντικείμενο".
3.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *(0,0)* για να δημιουργήσετε το σημείο B. Ανοίξτε το παράθυρο ιδιοτήτων και επιλέξτε "Σταθερό αντικείμενο".
4.		Χρησιμοποιήστε το εργαλείο της μεγέθυνσης για να έχετε κύκλο στο μέγεθος που θέλετε.
5.		Μετακινήστε το χώρο σχεδίασης ώστε ο κύκλος να πάρει τη θέση που θέλετε.
6.		Δημιουργήστε ένα δρομέα a με Ελάχιστο 0, Μέγιστο 2π, αύξηση 0.01 και ρυθμίστε το Πλάτος σε 200.

7.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *(cos(a),sin(a))* για να δημιουργήσετε το σημείο Γ.
8.		Δημιουργήστε τη γωνία επιλέγοντας με τη σειρά τα σημεία Α, Β και Γ. Αν είναι αναγκαίο ανοίξτε τις ιδιότητες και στα Βασικά επιλέξτε Δείξε την ετικέτα→Τιμή.
9.		Δημιουργήστε τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ.
10.		Δημιουργήστε το τόξο e, επιλέγοντας τα σημεία Β, Α και Γ με αυτή τη σειρά. Ανοίξτε το παράθυρο Ιδιότητες. Αλλάξτε χρώμα και το Στυλ σε πιο παχιά γραμμή. Από το μενού Προχωρημένες επιλέξτε Στρώση 1.
11.		Δημιουργήστε το κείμενο: Μήκος τόξου: e

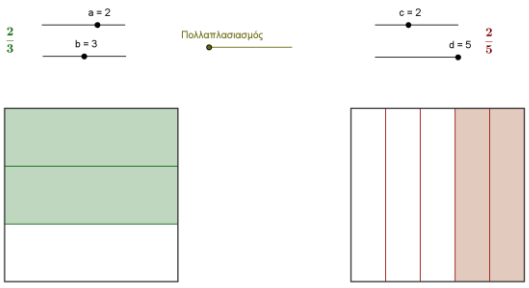
Παρατήρηση: Χρησιμοποιήστε το παράθυρο Ιδιοτήτων για να αλλάξετε την εμφάνιση του αρχείου σας. Δημιουργήστε το μέσο του τόξου και βάλτε εκεί ένα κείμενο που να δείχνει το μήκος του τόξου, μετά αποκρύψτε το σημείο.
Στο αρχείο κατασκευάσαμε κύκλο ακτίνας 1 και για αυτό το μήκος του τόξου σε ακτίνια είναι ίσο με το μέτρο της γωνίας.
Τροποποιήστε το αρχείο ώστε να έχει ο κύκλος μεταβλητή ακτίνα και τότε το αρχείο θα δείχνει μήκος τόξου $s=r\theta$, όπου τα σύμβολα έχουν τη συνήθη σημασία τους.

2-Οπτικοποίηση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων

Πολλοί μαθητές έχουν δυσκολίες στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε μια οπτική προσέγγιση για να τους βοηθήσουμε να κατανοήσουν τη διαδικασία του πολλαπλασιασμού. Η παράγραφος αυτή ενώνει ιδέες και εντολές που έχουν παρουσιαστεί σε προηγούμενα τετράδια εργασίας. Αν δεν είστε εξοικειωμένοι ή δεν έχετε ξεκαθαρίσει τι κάνουν οι εντολές αυτές ανατρέξτε σε εξηγήσεις προηγού-μενων τετραδίων εργασίας.

Προετοιμασία

- ★ Ανοίξτε ένα νέο αρχείο της GeoGebra.
- ★ Αποκολλήστε το παράθυρο της Άλγεβρας. Αποκρύψτε το σύστημα αξόνων.
- ★ Από το μενού Επιλογές μπορείτε να επιλέξετε «Ετικετοποίηση αντικειμένων» «Μόνο σε νέα σημεία».



Οδηγίες κατασκευής Βήμα-Βήμα

1.		Δημιουργήστε 5 δρομείς a,b,c,d,e με Ελάχιστο 0, Μέγιστο 5 και αύξηση 1. Το πρώτο κλάσμα θα είναι a/b το δεύτερο c/d . Ο δρομέας e θα χρησιμοποιηθεί για τη μετακίνηση του ενός τετραγώνου πάνω από το άλλο.
2.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *A = (0+e , 0)* για να δημιουργήσετε το σημείο Α.
3.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *B = A+ (5 , 0)* για να δημιουργήσετε το σημείο Β.
4.		Δημιουργήστε τετράγωνο με το εργαλείο του κανονικού πολυγώνου. Επιλέξτε τα σημεία Α κα Β και δώστε 4 στο πεδίο που εμφανίζεται.
5.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *E = (10-e , 0)* για να δημιουργήστε το σημείο Ε.
6.	Επαναλάβετε τα βήματα 3 και 4 για να δημιουργήσετε τετράγωνο με κάτω αριστερή κορυφή το σημείο Ε.	
7.		Προσαρμόστε το δρομέα e. Όταν η τιμή του είναι 5 πρέπει το ένα τετράγωνο να καλύπτει ακριβώς το άλλο.
8.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *L1=Ακολουθία[A+i*(Δ-A),i,0,1,1/b]* Θα δημιουργήστε μια λίστα σημείων στην πλευρά ΑΔ του 1ου τετραγώνου που χωρίζουν την πλευρά σε ίσα μέρη 1/b του μήκους της πλευράς.
9.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *L2=Ακολουθία[B+i*(Γ-B),i,0,1,1/b]*
10.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *L3=Ακολουθία[Τμήμα[ΣτοιχείοΛίστας[L1,k],ΣτοιχείοΛίστας[L2,k]],k,2,b]* Θα δημιουργήσετε μια λίστα από ευθύγραμμα τμήματα από τα σημεία της L1 στα αντίστοιχα της L2.
11.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *P=Δ-(0,a/b*5)*
12.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *Σ=Γ-(0,a/b*5)*
13.		Δημιουργήστε το πολύγωνο ΔΓΣΡ – επιλέξτε στο τέλος ξανά την κορυφή Δ για να κλείσει το πολύγωνο. Αυτό το πολύγωνο είναι η αναπαράσταση του αριθμητή του κλάσματος a/b.
14.	Επαναλάβετε τα βήματα 8 – 13 για να δημιουργήσετε την οπτική αναπαράσταση του κλάσματος c/d στο 2ο τετράγωνο. Αυτή τη φορά χωρίστε το τετράγωνο κάθετα αντί για οριζόντια που κάνατε για το 1ο.	

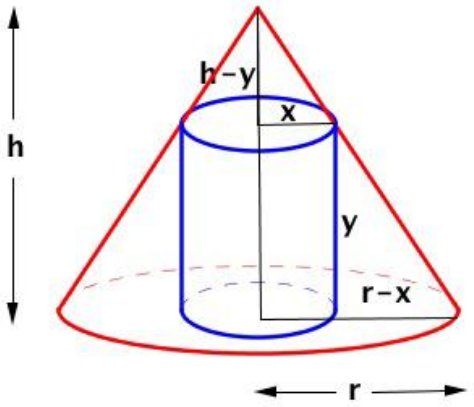
<u>Παρατήρηση</u>: Χρησιμοποιήστε το παράθυρο Ιδιοτήτων για να αλλάξετε την εμφάνιση του αρχείου σας. Αποκρύψτε όλα τα μη σημαντικά αντικείμενα και ετικέτες ώστε να φαίνονται μόνο τα σημαντικά.

Κάντε τις επόμενες αλλαγές-βελτιώσεις στο αρχείο σας:

- ★ Αλλάξτε το έτσι ώστε στα αρχικά πολύγωνα πολύγ1 και πολυγ2 να μην είναι ορατό το εσωτερικό τους παρά μόνο οι πλευρές τους.
- ★ Παρατηρήστε τι συμβαίνει για τις τιμές του δρομέα a που είναι μεγαλύτερες από αυτές του b. Προσπαθήστε να το διορθώσετε αυτό.
  Κάντε το αντίστοιχο για τους δρομείς c και d.
- ★ Δημιουργήστε ένα κουτί επιλογής για να εμφανίσετε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού.

3- Οπτικοποίηση του μέγιστου

Το παρακάτω παράδειγμα είναι αρκετά περίπλοκο και μας δίνει μια ιδέα των δυνατοτήτων της GeoGebra. Σε αυτή την παράγραφο θα χωρίσουμε την οθόνη αποκρύπτοντας τους άξονες και θα δημιουργήσουμε δικούς μας. Το πρόβλημα αφορά το μέγιστο του Όγκου ενός κυλίνδρου που είναι εγγεγραμμένος σε κώνο ύψους h και ακτίνας r.



Από την ομοιότητα των τριγώνων που φαίνονται στο διπλανό σχήμα έχουμε:

$$\frac{h-y}{x}=\frac{h}{r}$$

$$\Rightarrow r\cdot h-r\cdot y=h\cdot x$$

$$\Rightarrow y=h-\frac{h}{r}x$$

Αν V ο όγκος του κυλίνδρου τότε είναι $V=\pi\cdot x^2\cdot y$ και θα βρούμε το μέγιστο ως εξής:

$$V=\pi\cdot x^2\left(h-\frac{h}{r}x\right)=\pi\cdot x^2\cdot h-\frac{\pi\cdot h}{r}x^3$$

$$\frac{dV}{dx}=2\pi\cdot x\cdot h-\frac{3\pi\cdot h}{r}x^2$$

Λύνοντας την $\frac{dV}{dx}=0$ έχουμε:

$$\frac{3\pi\cdot h}{r}x=2\pi\cdot h$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\cdot r}{3}$$

Οπότε έχει μέγιστο όταν $x=\frac{2\cdot r}{3}$, $y=\frac{h}{3}$ και ο μέγιστος όγκος $V=\frac{4\pi\cdot h\cdot r^2}{27}$

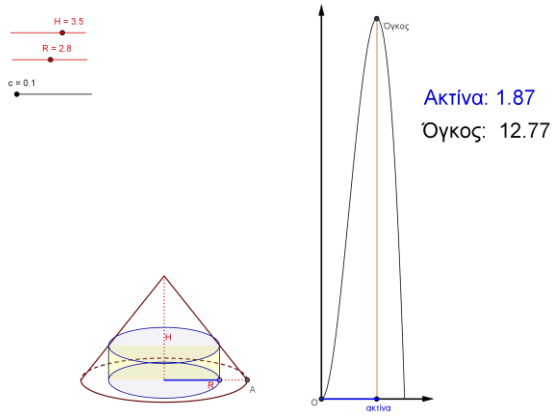
Ο υπολογισμός μας επιτρέπει να πάρουμε κατάλληλες τιμές για τα r και h Καθώς και μια ιδέα για την κλίμακα που χρειαζόμαστε για τη συνάρτηση V.

Προετοιμασία

★ Ανοίξτε ένα νέο αρχείο της GeoGebra.

★ Δείξτε το παράθυρο της Άλγεβρας, το σύστημα αξόνων και την Εισαγωγή.

★ Από το μενού Επιλογές μπορείτε να επιλέξετε «Ετικετοποίηση αντικειμένων» → «Αυτόματα».



Γνωριμία με νέα εργαλεία

Έλλειψη Νέο εργαλείο Κάντε Click για να επιλέξετε τις εστίες της έλλειψης και μετά ένα σημείο της.	
Μεταφορά αντικειμένου με διάνυσμα Νέο εργαλείο Κάντε Click για να επιλέξετε αντικείμενο για μεταφορά και μετά το διάνυσμα.	
Διάνυσμα μεταξύ δύο σημείων: Νέο εργαλείο Κάντε Click για να επιλέξετε την αρχή του διανύσματος και μετά το πέρας.	

<u>Βοηθητικό Στοιχείο</u>: Μην ξεχνάτε να διαβάζετε τη βοήθεια για κάθε εργαλείο που επιλέγετε. Μπορεί να σας φανεί χρήσιμο να δοκιμάσετε τα νέα εργαλεία πριν ξεκινήσετε την κατασκευή σας.

Οδηγίες κατασκευής Βήμα-Βήμα

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε H και R για το ύψος και την ακτίνα του κώνου, ενώ h και r θα είναι το ύψος και η ακτίνα του κυλίνδρου. Θα τα δημιουργήσουμε ως δρομείς για να είμαστε σίγουροι ότι εμφανίζονται σωστά. Αργότερα μπορούμε να αποκρύψουμε τους δρομείς.

1.		Δημιουργήστε το δρομέα H με Ελάχιστο 0.1 και Μέγιστο 5. Με το εργαλείο «Μετακίνηση» προσαρμόστε τον στην τιμή 3.
2.		Δημιουργήστε το δρομέα R με Ελάχιστο 0.1 και Μέγιστο 5. Με το εργαλείο «Μετακίνηση» προσαρμόστε τον στην τιμή 2.
3.		Click στον άξονα X και στον άξονα Y για να δημιουργήσετε την αρχή των αξόνων. Μετονομάστε το σε O.
4.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *V=Συνάρτηση[π*x^2*H-π*H/R*x^3,0,R]* Αυτό θα δημιουργήσει το γράφημα της συνάρτησης V(x) του όγκου του κυλίνδρου.
5.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *A=(-1,0)* Κάντε το σημείο Σταθερό Αντικείμενο. Θα αποτελεί το δεξιότερο σημείο της βάσης του κώνου.

6.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *B=A+(-2R,0)* Θα αποτελεί το πιο αριστερά σημείο της βάσης του κώνου.
7.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *M=(A+B)/2* που θα αποτελεί το μέσον της βάσης.
8.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *C=M+(0,H)* που θα αποτελεί την κορυφή του κώνου.
9.		Δημιουργήστε το ευθύγραμμο τμήμα BC.
10.		Δημιουργήστε το ευθύγραμμο τμήμα AC.
11.		Δημιουργήστε το δρομέα c με Ελάχιστο 0 και Μέγιστο 0.5 και Αύξηση 0.01
12.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *D=A-(c,0)* που θα αποτελεί τη μία εστία της έλλειψης.
13.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *E=B+(c,0)* που θα αποτελεί την άλλη εστία της έλλειψης.
14.		Επιλέξτε τα σημεία D, E και A για να δημιουργήσετε την έλλειψη d με εστίες τα D και E που διέρχεται από το σημείο A. Αυτή θα είναι η βάση του κώνου. Με το δρομέα c προσαρμόστε την έλλειψη στη θέση που θέλετε.
15.		Δημιουργήστε το τμήμα MA. Θα ονομαστεί e.
16.		Δημιουργήστε ένα σημείο στο τμήμα MA και μετονομάστε το σε F.
17.		Αποκρύψτε την έλλειψη d.
18.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *Τόξο[d,A,B]* που θα δημιουργήσει το τόξο f της έλλειψης από A ως B.
19.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *Τόξο[d, B, A]* που θα το δημιουργήσει το τόξο g της έλλειψης από B ως A.
20.		Επιλέξτε το σημείο F και μετά το M για να δημιουργήσετε το σημείο F' που είναι το συμμετρικό του F με κέντρο συμμετρίας το σημείο M.
21.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *r = abs(x(M) -x(F))* για να πάρετε την ακτίνα r του κυλίνδρου, που είναι η απόλυτη διαφορά των τετμημένων των M και F.

22.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *h=H-H*r/R* για να πάρετε το h που θα είναι το ύψος του κυλίνδρου.
23.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *G = F + (0, h)* για να πάρετε το G στο οποίο θα τέμνει ο κύλινδρος τον κώνο.
24.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *I=F'+(0,h)* για να πάρετε το I που θα τέμνει ο κύλινδρος τον κώνο.
25.		Δημιουργήστε το ευθύγραμμο τμήμα FG.
26.		Δημιουργήστε το ευθύγραμμο τμήμα F'I.
27.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *J=F-(c,0)* για να πάρετε το J που θα είναι η 1η εστία της έλλειψης που αποτελεί τη βάση του κυλίνδρου.
28.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *K=F'+(c,0)* για να πάρετε το K που θα είναι η 2η εστία της έλλειψης που αποτελεί τη βάση του κυλίνδρου.
29.		Επιλέξτε τα σημεία J, K και F για να δημιουργήσετε την έλλειψη k με εστίες τα J και K που διέρχεται από το σημείο F. Αυτή θα είναι η βάση του κυλίνδρου. Με το δρομέα c προσαρμόστε την έλλειψη στη θέση που θέλετε.
30.		Επιλέξτε τα σημεία F και G με αυτή τη σειρά για να δημιουργήσετε το διάνυσμα u.
31.		Επιλέξτε την έλλειψη k και το διάνυσμα u για να δημιουργή-σετε την έλλειψη k' που είναι μεταφορά της k κατά u. Αυτή αποτελεί την πάνω βάση του κυλίνδρου.
32.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *L=(R+1,0)* για να δημιουργήσετε το σημείο L στον ημιάξονα Ox.
33.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *N=(0 , 4π*H*R^2/27+0.5)* για να δημιουργήσετε το σημείο N στον ημιάξονα Oy.
34.		Δημιουργήστε τα διανύσματα OL και ON.
35.	Χρησιμοποιήστε το παράθυρο ιδιότητες για να αποκρύψετε όλα εκτός του γραφήματος V(x) των διανυσμάτων OL και ON και τα σχήματα των κώνου και κυλίνδρου. Αν κάποια σε από τα αντικείμενα βλέπετε τις ετικέτες, τότε αποκρύψτε τες.	
36.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *P=(r,0)* για να δημιουργήσετε το σημείο P στον ημιάξονα Ox. Δώστε τίτλο «ακτίνα» και επιλέξτε στην Ετικέτα Τίτλος.

37.	Εισαγωγή	Στην Εισαγωγή πληκτρολογήστε: *Q=(r,V(r))* για να πάρετε το σημείο Q στη γραφική παράσταση. Δώστε τίτλο 'Όγκος' και επιλέξτε στην Ετικέτα Τίτλος.
38.		Δημιουργήστε το τμήμα PQ.
39.	ABC	Δημιουργήστε το κείμενο: Ακτίνα: r
40.	ABC	Δημιουργήστε το κείμενο: Όγκος: V(r)

Παρατήρηση: Χρησιμοποιήστε την ποικιλία των εργαλείων που μάθατε για να αλλάξετε την εμφάνιση του αρχείου σας. Αποκρύψτε όλα τα μη σημαντικά αντικείμενα και ετικέτες ώστε να φαίνονται μόνο τα σημαντικά. Μπορείτε να δημιουργήσετε σημεία τομής των πλευρών του κυλίνδρου με τις ελλείψεις προκειμένου να δημιουργήσετε τόξα που θα δίνουν την αίσθηση ότι ο κύλινδρος κρύβεται πίσω από τον κώνο.

4 – Πρόκληση: Εμβαδό επιφανείας

Το εμβαδόν της επιφάνειας του κυλίνδρου μπορεί επίσης να μεγιστοποιηθεί. Προσπαθήστε να φτιάξετε ένα αρχείο GeoGebra για να το δείξετε αυτό. Μπορεί να αντιμετωπίσετε προβλήματα που δεν περιμένετε που θα σας δείξουν την ανάγκη να κάνετε πρώτα τα μαθηματικά.

Εργασία για ολοκλήρωση

★ Ανοίξτε ένα νέο αρχείο GeoGebra.

★ Λύστε πρώτα το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του εμβαδού της επιφάνειας του κυλίνδρου που είναι εγγεγραμμένος σε κώνο.

★ Ελέγξτε τις ελάχιστες και μέγιστες τιμές των μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσετε.

★ Προσθέστε διευκρινήσεις, οδηγίες ή ακόμα και προβλήματα για τους μαθητές σας.